19/11/2014

Να θυμάστε:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ και

μάλιστα $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

για παράδειγμα $n=2$

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτο

f διαφορίσιμη στο $(x_0, y_0) \in U \Leftrightarrow \exists f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

και $$\lim_{(x,y) \to (} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

(Εφαπτομενο Επιπεδο) $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Αν γράψουμε $T(x_0, y_0) \cdot (x, y) := f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

τότε το επιπεδο $z = T(x_0, y_0)(x, y)$ ονομάζεται

$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ εφαπτόμενο επίπεδο ~~της~~ f στο

(x_0, y_0) (ή καλύτερα) του γραφήματος

$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\}$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Επίσης, αυτό γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Π.χ 1.

Για την $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Η f συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ δηλ $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, επειδή $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0$ ή αλλιώς $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$ και έτσι οι συναρτήσεις:

$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχείς ως πολυωνυμικές συναρτήσεις, καθώς το εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0,y_0) είναι $z=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)$

$$\Rightarrow z = x_0^2+y_0^2+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)$$

$$\left[\text{ή } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2+y_0^2 \end{pmatrix} + (x-x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_0 \end{pmatrix} + (y-y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix}\right]$$

στο $(x_0,y_0)=(0,0)$ έχουμε το εφαπτόμενο επίπεδο

$$z = 0^2+0^2+2\cdot 0(x-0)+2\cdot 0(y-0)=0$$

$$\left[\text{ή } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\right.$$

Π.χ 2

Έστω η $f(x,y)=\alpha x+\beta y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Να εξεταστεί εάν η f είναι διαφορίσιμη $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ και αν ναι να δοθεί το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος σε κάθε σημείο του $(x,y,f(x,y))$

Λύση

Η $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ είναι συνεχής αφού $(x,y)\mapsto\alpha$ και $(x,y)\mapsto\beta$ συνεχείς ως σταθερές άρα f συνεχ. διαφορ. $\Rightarrow f$ διαφορίσιμη.

Με εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x_0,y_0)

$$z=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)\Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \alpha x_0 + \beta x_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) =$
$= \alpha x + \beta y = f(x,y)$
(Προφανώς το $f(x,y) = \alpha x + \beta y$ ένα επίπεδο
άρα το εφαπτόμενο επίπεδο της f είναι
ο ίδιος της ο εαυτός.)

Π.χ 3
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x^2+y^2<1$
Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο
στο $(0,0,1) \in \Gamma_f$ και αν ναι υπολογίστε το

ΛΥΣΗ
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{1}{2} \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$
με ∇f συνεχής $\Rightarrow$ f διαφορίσιμη $\forall (x,y) \in B((0,0),1)$
Έπειτα, η f διαφορ. στο $(0,0)$
$$\nabla f(0,0) = (0,0) = Df(0,0)$$
Με εφαπτόμενο επίπεδο στο $(0,0)$

$$z = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) = f(0,0) = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό
$x \in U$ και $v \in \mathbb{R}^n$ με $\|v\| = 1$. Το όριο
$D_v f(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$
λέγεται παράγωγος κατά κατεύθυνση v της f στο
σημείο x

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$
$\|v\| = 1$ και f διαφορίσιμη στο $x \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$